

DIDELIŲ SKAIČIŲ IŠRAIŠKOS BŪDAI

Tadas Panavas

*Utenos kolegijos Verslo ir technologijos fakultetas
Maironio g. 18, Utena*

Anotacija

Straipsnyje pateikta rinkinys uždavinių su sprendimais iš matematikos konkursų, olimpiadų (Lietuvos ir tarptautinių), kuriuose yra dideli skaičiai. Uždaviniai klasifikuojami į kelias grupes, kad padėtų pastebėti pagrindines idėjas, sprendžiant panašius uždavinius. Aptariami didelių skaičių išraiškos būdai.

Įvadas

Natūraliųjų skaičių yra be galo daug. Todėl sąvoka didelis skaičius yra reliatyvi. Šiame straipsnyje laikysime, kad didelis skaičius $>10^{10}$. Labai dideli skaičiai pasitaiko kosmologijoje, astronomijoje, kriptografijoje, statistinėje mechanikoje. Naudojant kompiuterius varžomasi ieškant vis didesnių kokios nors aibės skaičių, pvz., pirminių, Merseno pirminių, tobulųjų, draugiškųjų skaičių porų, Fibonačio ir kt.

Straipsnyje analizuojama skaičių išraiška ir nagrinėjama keletas didelių skaičių išraiškos būdų. Rengiant straipsnį taikyti analizės ir klasifikavimo metodai.

1. Skaičių išraiška

Apibrėžimas 1. Standartinė skaičiaus išraiška - skaičiaus užrašas pavidalu $a \cdot 10^n$, kur $1 \leq |a| < 10$, n – sveikasis skaičius. Rodiklis n vadinamas skaičiaus eile.

Tokiu pavidalu užrašytus skaičius lengva palyginti. Šis išraiška populiari gamtos moksluose. Nuo Didžiojo sprogo (angl. *Big Bang*), davusio pradžią visatai, praėjo $4,355 \cdot 10^{17}$ sekundžių. Stebimoje visatoje yra apie $5 \cdot 10^{22}$ žvaigždžių ir apie $1,25 \cdot 10^{11}$ galaktikų. Apie 10^{80} atomų visatoje. Neuronų jungčių žmogaus smegenyse apie 10^{14} . Avogadro konstanta – $6,022 \cdot 10^{23}$ (atomų, molekulių skaičius medžiagos molyje).

Kai kurie dideli skaičiai yra gavę pavadinimus: gugolas (angl. *googol*) 10^{100} , gugolpleksas (angl. *googolplex*) -10^{googol} .

Yra sukurta žymėjimų, kurie leidžia kompaktiškai užrašyti labai didelius skaičius. Tai laipsniai, faktorialas, superfaktorialas, hiperfaktorialas, Knuto rodyklės.

Apibrėžimas 2. Natūraliojo skaičiaus n faktorialas:

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Stirlingo formulė:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Dauguma kalkuliatorių faktorialus skaičiuoja iki 69: $69! < 10^{100} < 70!$ arba 449: $449! < 10^{998}$. Superfaktorialas apibrėžtas Pickover (1995 m.)

Apibrėžimas 3.

$$n\$ = \underbrace{n!^{n! \cdot n!}}_{n!}$$

Pvz., $1\$ = 1$, $2\$ = 4$, $3\$ = 6^{66666}$. Neil Sloane ir Simon Plouffe apibrėžė superfaktorialą kitaip nei Pickover:

Apibrėžimas 4. Natūraliojo skaičiaus n superfaktorialas:

$$sf(n) := \prod_{k=1}^n k!$$

Pvz., $sf(4) = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 288$, o pirmųjų superfaktorialų seka (nuo $n = 0$): 1, 1, 2, 12, 288, 34560, 24883200, 125411328000,...

Apibrėžimas 5. Skaičiaus n hiperfaktorialas:

$$H(n) = \prod_{k=1}^n k^k = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot (n-1)^{n-1} \cdot n^n.$$

Kai $k = 1, 2, 3, 4$, $H(n)$ reikšmės 1, 4, 108, 27648. Apibrėžkime naują išraiškos būdą remdamiesi superfaktorialo ir hiperfaktorialo apibrėžimais. Pažymėkime tą išraišką $HS(n)$

Apibrėžimas 6.

$$HS(n) = \underbrace{H(n)^{H(n) \cdot \dots \cdot H(n)}}_{H(n)}, H(n) - \text{hiperfaktorialas}.$$

Pirmosios reikšmės $HS(n)$: $HS(1) = 1$; $HS(2) = 4^{4^4}$; $HS(3) = \underbrace{108^{108 \cdot \dots \cdot 108}}_{108}$.

1976 m. D. Knutas (*D. Knuth*) sukūrė metodą labai dideliems skaičiams užrašyti, pavadintą Knuto rodyklėmis (angl. *Knuth's up-arrow notation*).

$$\begin{aligned} a \times b &= \underbrace{a + a + \dots + a}_b; \\ a \uparrow b &= a^b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_b, \\ a \uparrow\uparrow b &= \underbrace{a^{a^{\cdot \cdot \cdot a}}}_b = a \uparrow (a \uparrow (\dots \uparrow a)). \end{aligned}$$

Pvz., $4 \uparrow\uparrow 3 = 4^{4^4} = 4 \uparrow (4 \uparrow 4) = 4^{256} \approx 1,34078079 \cdot 10^{154}$.

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\dots \uparrow\uparrow a))}_b.$$

Naudodami Knuto rodykles superfaktorialą galima apibrėžti taip: $n\$ = n! \uparrow\uparrow n!$.

Apibrėžimas 7. *Graham skaičius* G . $G = g_{64}$, kur $g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ ir $g_n = 3 \uparrow^{g_{n-1}} 3$. Tai kol kas pats didžiausias skaičius panaudotas matematiniame įrodyme.

2. Dideli skaičiai uždaviniuose

Matematikos konkursų, olimpiadų uždaviniuose labai dideli skaičiai pasitaiko nedažnai. Tuos uždavinius, kuriuose aptinkame didelius skaičius, galima suskirstyti pagal tai, ko klausiama:

- Kuris iš duotų skaičių didesnis?
- Kokie paskutiniai duoto skaičiaus skaitmenys?
- Kokia skaitmenų suma?

- Ar dalijasi iš kokio nors skaičiaus?
- Kiek turi skaitmenų?
- Kaip išskaidyti dauginamaisiais?

Taigi dažniausiai klausiama apie didelių skaičių skaitmenis ir daliklius. Pateiksime keletą uždavinių su sprendimais. Pradėkime nuo skaičių palyginimo.

Uždavinys 8 (LitMo 1973). *Irodykite, kad $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101 < 51^{101}$.*

Pagal vidurkių teoremą

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101 = (1 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 100) \cdot \dots \cdot (50 \cdot 52) \cdot 51 < 51^2 \cdot 51^2 \cdot \dots \cdot 51^2 \cdot 51 = 51^{101}. \text{ QED.}$$

Uždavinys 9 (LitMo 1973). *Irodykite, kad $100^{101} > 101^{100}$.*

$$100^{101} > 101^{100} \Leftrightarrow 100 > \left(\frac{101}{100}\right)^{100}, \text{ tačiau } \left(\frac{101}{100}\right)^{100} < \frac{100}{99} \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{99}{98} \cdot \dots \cdot \frac{51}{50} \cdot \frac{51}{50} = 4. \text{ Taigi tikrai } 100 > \left(\frac{101}{100}\right)^{100}. \text{ QED.}$$

Uždavinys 10. *Kuris iš šių skaičių didesnis: 31^{11} ar 17^{14} ?*

$$31^{11} = (2^5 - 1)^{11} < 2^{55} < 2^{56} < (2^4)^{14} < (2^4 + 1)^{14}.$$

Dažnai uždaviniuose su labai dideliais skaičiais prašoma rasti paskutinius skaitmenis.

Uždavinys 11 (LitMo 1957). *Raskite skaičiaus $2^{3^{100}}$ paskutinį skaitmenį.*

$$3^{100} = (80 + 1)^{25} = 80^{25} + C_{25}^1 80^{24} + C_{25}^2 80^{23} + \dots + C_{25}^{24} 80 + 1 = 80k + 1; \\ 2^{3^{100}} = 2 \cdot 2^{80k} = 2 \cdot 16^{20k}. 16^{20k} \text{ baigiasi visada 6, todėl } 2^{3^{100}} \text{ baigiasi skaitmeniu 2.}$$

Uždavinys 12. *Kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius 777^{777} ?*

$$777 = 193 \cdot 4 + 5. 7^4 \text{ baigiasi 1 ir } 7^5 \text{ baigiasi 7, todėl } 777^{777} \text{ baigiasi 7.}$$

Uždavinys 13. *Raskite skaičiaus 7^{9^9} paskutinius du skaitmenis.*

$$9^{9^9} = (8 + 1)^{9^9} = 8m + 1, m \in \mathbb{Z}, \text{ iš čia}$$

$$7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1} = (7^4)^{2m} \cdot 7 = 2041^{2m} \cdot 7 = (100n + 1) \cdot 7 = 100 \cdot 7n + 7. \text{ Taigi } 7^{9^{9^9}} \text{ baigiasi 0 ir 7.}$$

Kartais galima nesunkiai sužinoti, ar didelis skaičius dalijasi iš kokio nors konkretaus skaičiaus.

Uždavinys 14 (LitMo 1961). *Irodykite, kad skaičius $2222^{5555} + 5555^{2222}$ dalijasi iš 7.*

Pastebime, kad $1111 = 7N + 5$, tada $2222 = (7N + 5) \cdot 2 = 7N + 10 = 7N + 3$ ir $5555 = 7N + 4$. Todėl $2222^{5555} + 5555^{2222} = 7N + 3^{5555} + 4^{2222} = 7N + (243)^{1111} + 16^{1111} = 7N + 5^{1111} + 2^{1111}$, bet $5^{1111} + 2^{1111}$ dalijasi iš $5 + 2 = 7$. QED.

Uždavinys 15. *Irodykite, kad skaičius $7^{7^7} - 7^{7^7}$ dalijasi iš 10.*

Skaičius 7^4 baigiasi 01, o skaičius 7^3 baigiasi 43. Todėl 7^7 baigiasi 43, o 7^{4n} baigiasi 01. Todėl $7^{7^7} = 7^{100n+43} = (7^4)^{25n+10} \cdot 7^3$ baigiasi 43. 7^{7^7} taip pat baigiasi 43. Vadinas $7^{7^7} - 7^{7^7}$ dalijasi iš 10.

Uždavinys 16 (LitMo 1957). *Įrodykite, kad $17^{45} - 2$ dalijasi iš 5.*

17^2 baigiasi 9, 17^4 baigiasi 1, 17^{44} baigiasi 1, o 17^{45} baigiasi 7. Todėl $17^{45} - 2$ baigiasi 5.

Uždavinys 17 (LitMo 1958). *Įrodykite, kad $43^{23} + 23^{43}$ dalijasi iš 66.*

$43^{23} + 23^{43} = (44 - 1)^{23} + (22 + 1)^{43} = 11N + 1 - 1 = 11N$, be to $43^{23} + 23^{43} = (42 + 1)^{23} + (24 - 1)^{43} = 3N + 1 - 1 = 3N$. Akivaizdu, kad $43^{23} + 23^{43}$ lyginis ir dalijasi iš $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$. QED.

Uždavinys 18 (LitMo 1983). *Skaičių $2^{1983} + 1$ išskaidykite į du natūraliuosius dauginamuosius, kurių kiekvienas didesnis už 1000.*

$$2^{1983} + 1 = (2^{661})^3 + 1 = (2^{661} + 1)(2^{1332} - 2^{661} + 1).$$

Norint įrodyti, kad skaičius sudėtinis, užtenka rasti bent vieną netrivialų daliklį.

Uždavinys 19 (LitMo 1981). *Įrodykite, kad skaičius $1^{1981} + 2^{1981} + 3^{1981} + \dots + 1981^{1981}$ yra sudėtinis.*

$(1^{1981} + 1980^{1981}) + (2^{1981} + 1979^{1981}) + \dots + (990^{1981} + 991^{1981}) + 1981^{1981} = 1981a_1 + 1981a_2 + \dots + 1981a_{990} + 1981^{1981}$, $a_1; a_2; \dots; a_{990}$ yra natūralieji skaičiai. Todėl $1^{1981} + 2^{1981} + 3^{1981} + \dots + 1981^{1981}$ dalijasi iš 1981.

Uždavinys 20 (IMO 1975, Shortlist). *Sakykite, kad A yra skaičiaus 16^{16} skaitmenų suma, o B skaičiaus A skaitmenų suma. Raskite skaičiaus B skaitmenų sumą neskaičiuodami 16^{16} .*

Pažymėkime skaičiaus B skaitmenų sumą C. Žinome, kad $16^{16} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod{9}$. Kadangi $16^{16} = 2^{64} = 2^{6 \cdot 10 + 4} \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod{9}$, tai $C \equiv 7 \pmod{9}$. Be to $16^{16} < 100^{16} = 10^{32}$. Taigi A negali būti didesnis nei $9 \cdot 32 = 288$, B - nei 19, o C - nei 10. Todėl $C = 7$.

Uždavinys 21 (IMO 1989, Longlist). *Duoti du natūralieji skaičiai w ir n. n aukščio skaičių w bokštas yra natūralusis skaičius $T_n(w) = w^{w^{w^{\dots}}}$, dešinėje pusėje w yra n kartų. Tiksliau, $T_1(w) = w$ ir $T_{n+1}(w) = w^{T_n(w)}$. Pavyzdžiui, $T_3(2) = 2^{2^2} = 16$; $T_4(2) = 2^{16} = 65536$ ir $T_2(3) = 3^3 = 27$. Raskite mažiausią trijų bokštų, kuris didesnis už 1989 aukščio dviejų bokštų. Kitaip tariant, raskite mažiausią n reikšmę tokią, kad $T_n(3) > T_{1989}(2)$. Atsakymą pagrįskite.*

Įrodysime, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui n: $4T_n(3) < T_{n+2}(2) < T_{n+1}(3)$. Naudosime matematinės indukcijos metodą. Kai $n = 1$, tai $12 < 16 < 27$. Tarkime $n \geq 2$ ir $4T_{n-1}(3) < T_{n+1}(2) < T_n(3)$. Tada $T_{n+2}(2) = 2^{T_{n+1}(2)} < 2^{T_n(3)} < 3^{T_n(3)} = T_{n+1}(3)$. Be to $T_{n+2}(n) = 2^{T_{n+1}(2)} > 2^{4T_{n-1}(3)} = 16^{T_{n-1}(3)} = (16/3)^{T_{n-1}(3)} \cdot 3^{T_{n-1}(3)} > 4T_n(3)$. Kai $n = 1987$ gauname: $4T_{1987}(3) < T_{1989}(2) < T_{1988}(3)$. Taigi mažiausias n tenkinantis uždavinio sąlygą yra 1988.

Uždavinys 22. *Įrodykite, kad $((3!)!)!$ turi daugiau kaip 1000 skaitmenų.*

Kadangi $3! = 6$, $(3!)! = 720$, tai $((3!)!)! = 720! > 99!100^{621} > 10^{1242}$.

LitMo - Lietuvos matematikos olimpiada, IMO - tarptautinė matematikos olimpiada.

Išvados

1. Straipsnyje pateikta rinkinys uždavinių su sprendimais iš matematikos konkursų, olimpiadų (Lietuvos ir tarptautinių), kuriuose yra dideli skaičiai, akcentuojant, kas svarbu sprendžiant uždavinius su dideliais skaičiais, kad išvengtume klaidų.
2. Uždavinių įvairovėje išskirtos kelios tendencijos, susijusios su šiais uždaviniais ir jų sprendimo būdais.

Literatūra

1. Grincevičius A., Mačys J. (1990). *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai*. Kaunas: Šviesa.
2. Kubilius J. (1972). *Olimpiadinis matematikos uždavinynas*. Kaunas: Šviesa.
3. Sierpiski W. (1970). *250 Problems in Elementary Number Theory*, New York: American Elsevier Publishing Company, Inc.
4. Djukic D., Jankovic V., Matic I., Petrovic N. (2006). *The IMO Compendium*. Springer.
5. Knuth D. (1976). *Mathematics and Computer Science: Coping with Finiteness*. *Science* 194 (4271): 1235–1242.
6. Pickover, C. A. (1995). *Keys to Infinity*. New York: Wiley.
7. Conway, J. H., Guy, R. K. (1996) *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag.

WAYS OF EXPRESSING LARGE NUMBERS

Tadas Panavas

*Utena University of Applied Sciences, Faculty of Business and Technology
Maironio str. 18, Utena*

Summary

The article contains a set of problems with decisions on mathematical competitions, olympiads (Lithuanian and international), which contain large numbers. Problems are grouped into several groups to help spot key ideas in solving similar problems. The expression of large numbers is discussed.